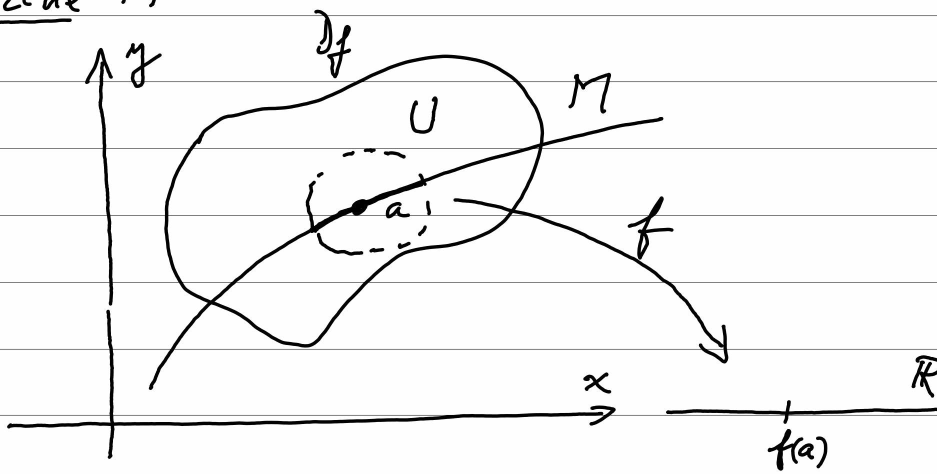
VÁZANÉ EXTRÉMY

Definice: Nechť je dána reálná funkce n proměnných f, množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a bod $a \in M \cap D_f$. Rekneme, že funkce f nabývá v bodě a lokální minimum (maximum) vzhledem k množině M, existuje-li okolí U bodu a takové, že pro každé $x \in U \cap M$ platí:

$$\boxed{f(a) \leq f(x) \quad \text{resp.} \quad f(x) \leq f(a).}$$

Lze-li uvedené nerovnosti nahradit pro $x \neq a$ ostrými nerovnostmi, potom hovoříme o tzv. ostrém lokálním minimu (resp. maximu) vzhledem k množině M.



<u>VĚTA</u> : Nechť $f, \Phi^1, \ldots, \Phi^s$ jsou reálnými funkcemi třídy C^1 na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť pro každé $x \in U$ má Jakobiho matice zobrazení $\Phi = (\Phi^1, \ldots, \Phi^s)$

$$\nabla \Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_n}(x) \\ - & - & - \\ \frac{\partial \Phi^s}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial \Phi^s}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

hodnost s. Nechť $M = \{x \in U : \Phi(x) = 0\}$ a funkce f nabývá v bodě $\hat{x} \in M$ lokální minimum nebo maximum vzhledem k množině M. Pak existuje jednoznačně určená s-tice reálných čísel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ taková, že bod $\hat{x}$ je stacionárním bodem tzv. Lagrangeovy funkce :

$$L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \Phi^i(x).$$

<u>VĚTA</u> : Buď dána reálná funkce $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ spojitá na omezené a uzavřené množině $K \subset \mathbb{R}^n$. Pak

body $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in K$ takové, že $f(\hat{x}_1) = \max\{f(x) : x \in K\}$ a $f(\hat{x}_2) = \min\{f(x) : x \in K\}$.

<u>Příklad</u>: Ukažme, že je-li $a \in \mathbb{R}^n$, potom je
$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \|x\|_{eucl.} = 1\right\} = \|a\|_{eucl.}$$

<u>Řešení</u>: Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ položme
$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Tato funkce je pak spojitou funkcí na množině $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{eucl.} = 1\}$. Dále lze snadno ukázat, že množina K je omezenou a uzavřenou množinou. Tedy v důsledku předchozí věty existuje bod $\hat{x} \in K$ takový, že $f(\hat{x}) = \max\{f(x) : x \in K\}$. Dále položme $\forall x \in \mathbb{R}^n$:
$$\Phi(x) = \|x\|^2_{eucl} = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$
kde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Nyní lze říci, že obě funkce f a Φ jsou třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$ a

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = 0\}.$$

Podle výše uvedené věty existovat číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že bod $\hat{x}$ je stacionárním bodem Lagrangeovy funkce:

$$L(x) = L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) +$$
$$+ \lambda \cdot \Phi(x_1, \dots, x_n) =$$
$$= \sum_{j=1}^n a_j x_j + \lambda \sum_{j=1}^n x_j^2 .$$

$$\nabla L(x) = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(x) \right) =$$

$$= \left(a_1 + 2\lambda x_1, \dots, a_n + 2\lambda x_n \right) \Rightarrow$$

je-li $x = \hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, pak

$$\nabla L(\hat{x}) = \left(a_1 + 2\lambda \hat{x}_1, \dots, a_n + 2\lambda \hat{x}_n \right).$$

Z podmínky stacionárnosti vyplývá, že

$$a_1 + 2\lambda \hat{x}_1 = 0$$
$$\vdots$$
$$a_n + 2\lambda \hat{x}_n = 0$$

Tedy $\hat{x}_1 = -\frac{1}{2\lambda} a_1, \dots, \hat{x}_n = -\frac{1}{2\lambda} a_n$.

Dál z podmínky $\hat{x} \in K$ plyne, že

$$1 = (\hat{x}_1)^2 + \dots + (\hat{x}_n)^2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\lambda} a_1\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2\lambda} a_n\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4\lambda^2} \left(a_1^2 + \dots + a_n^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2} \| a \|_{eucl.}$$

. Pak máme:

$$\hat{x} = \left(\pm \frac{a_1}{\|a\|_{eucl}}, \dots, \pm \frac{a_n}{\|a\|_{eucl.}} \right).$$

Pak

$$f(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\pm \frac{a_j}{\|a\|_{eucl.}} \right) =$$

$$= \pm \frac{1}{\|a\|_{eucl.}} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = \pm \frac{1}{\|a\|_{eucl.}} \|a\|_{eucl.}^2$$

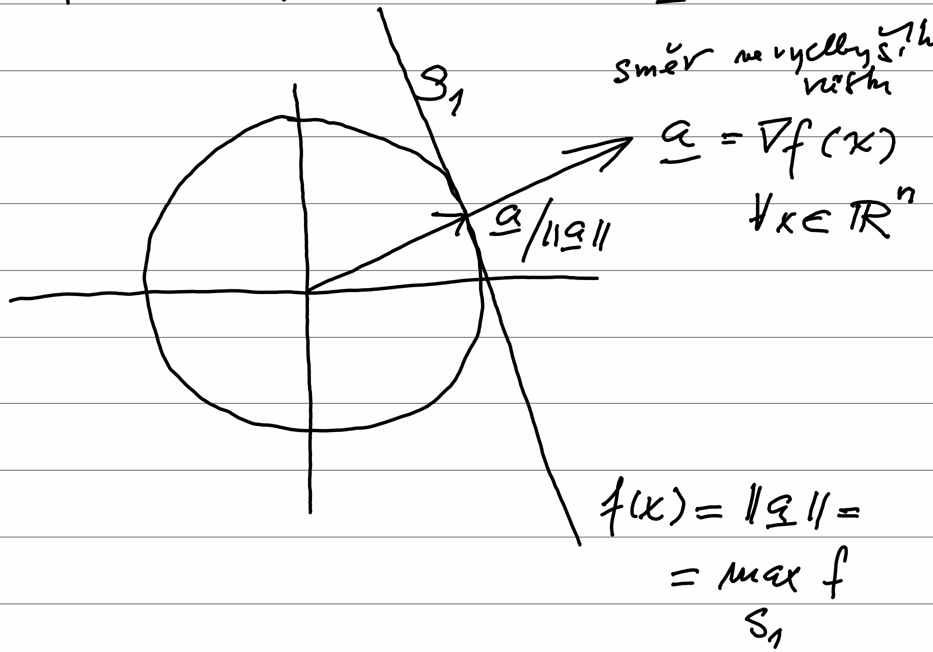
Odtud plyne, že $\max_K f = \|a\|_{eucl.}$ a

$\left(\min_K f = -\|a\|_{eucl.} \right)$

2

Poznámka: Pro $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$

je $\nabla f(x) = (a_1, \dots, a_n) = \underline{a}$



PŘÍKLAD: Mějme danou reálnou, čtvercovou a symetrickou matici $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$.
Nyní hledejme extrémy funkce

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definované předpisem:

$$f(x) = \langle \mathbb{A}x, x \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

na množině $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle = 1\}$.

Řešení: Nejdříve ukažme, že $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{f'(x) = 2 \cdot \mathbb{A} x}$$

(P.) Zvolme $h \in \mathbb{R}^n$, pak platí:

$$D_h f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\cdot h) - f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\langle \mathbb{A} \cdot (x+th), x+th \rangle - \langle \mathbb{A} \cdot x, x \rangle \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\langle \mathbb{A} x + t \cdot \mathbb{A} h, x+th \rangle - \langle \mathbb{A} x, x \rangle \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\cancel{\langle \mathbb{A} x, x \rangle} + t \langle \mathbb{A} x, h \rangle + t \langle \mathbb{A} h, x \rangle + t^2 \langle \mathbb{A} h, h \rangle - \cancel{\langle \mathbb{A} x, x \rangle} \right] =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\langle \mathbb{A} x, h \rangle + \langle \mathbb{A} h, x \rangle + t \langle \mathbb{A} h, h \rangle \right] =$$

$$= \langle \mathbb{A} x, h \rangle + \langle \mathbb{A} h, x \rangle \overset{?}{=} \underline{2 \langle \mathbb{A} x, h \rangle} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \mathbb{A} \cdot x. \quad \left(\text{Proč } f \in C^1(\mathbb{R}^n) \, ? \right)$$

Podobně, je-li fce $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dána předpisem $g(x) = \lambda \cdot \langle x, x \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$, potom $g'(x) = 2\lambda x$.

Lagrangeova funkce má nyní předpis:

$$L(x) = \langle Ax, x\rangle + \lambda \cdot (\langle x,x\rangle - 1).$$

Pak

$$L'(x) = 2 \cdot Ax + 2\lambda \cdot x.$$

Potom

$$L'(x) = 0 \iff Ax + \lambda x = 0$$

$$\iff \boxed{Ax = -\lambda x} \qquad (*)$$

$$(*) \Rightarrow \langle Ax, x\rangle = \langle -\lambda x, x\rangle = $$
$$= -\lambda \langle x, x\rangle.$$

Dále jestliže $\hat{x}$ splňuje podmínku $\langle \hat{x}, \hat{x}\rangle = 1$, pak:

$$\langle A\hat{x}, \hat{x}\rangle = -\lambda \langle \hat{x}, \hat{x}\rangle = -\lambda.$$

Pokud tedy $\hat{x}$ řeší úlohu na extrém, pak $\hat{x}$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\hat{\lambda} = -\lambda$, kde $\hat{x}$ a λ vyhovuje podmínce $(*)$.

Tedy extrémní hodnoty funkce $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ je vzdy rovna jistému vlastnímu číslu matice A.

S ohledem na kompaktnost množiny $M = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 1\}$ lze říci, že existují body $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in M$ takové, že $\forall x \in M$:

$$f(\hat{x}_1) \leqq f(x) \leqq f(\hat{x}_2)$$

Dále pak $f(\hat{x}_1) = \langle A\hat{x}_1, \hat{x}_1 \rangle = \lambda_1$, $f(\hat{x}_2) = \langle A\hat{x}_2, \hat{x}_2 \rangle = \lambda_2$, kde λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice A.
Je-li nyní λ_{min} nejmenší vlastní číslo a λ_{max} je největší vlastní číslo matice A, pak $\forall x \in M$:

$$\lambda_{min} \leqq \langle Ax, x \rangle \leqq \lambda_{max}.$$

Odtud plyne $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$(**) \quad \boxed{\lambda_{min} \|x\|^2 \leqq \langle Ax, x \rangle \leqq \lambda_{max} \|x\|^2}$$

Poznámka: Poznamenejme, že je-li $\mathbb{A}$ čtvercová symetrická matice, pak jsou všechna její vlastní čísla reálná.

Dále lze říci, že pokud má takováto matice všechna vlastní čísla kladná, potom je matice $\mathbb{A}$ pozitivně definitní. Pokud jsou naopak všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ záporná, potom je matice $\mathbb{A}$ nutně negativně definitní maticí.